Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

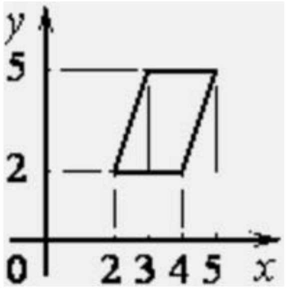
1 Диагональ экрана телевизора равна 55 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2, 54 см. Результат округлите до целого числа.

Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – курс доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.

Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: ____________________________.

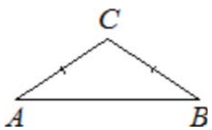
4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что разница выпавших очков равна 1 или 2.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения
$5^{6+x} = 5$.

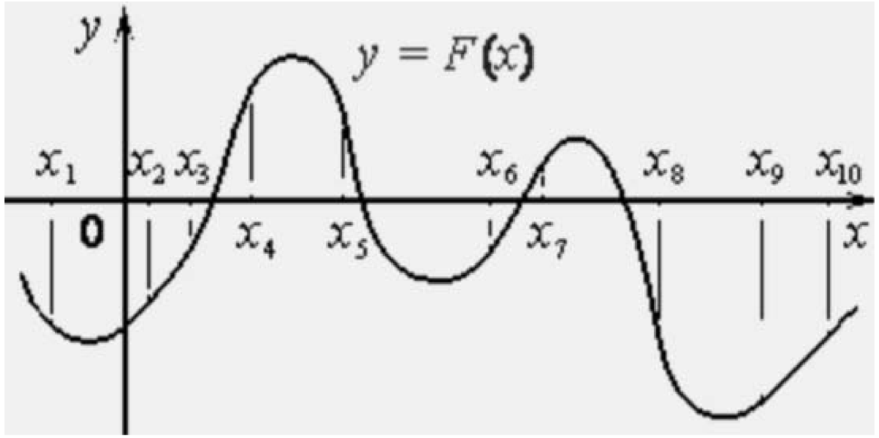
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен 102°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



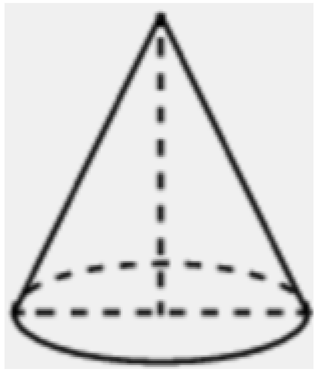
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



Ответ: ____________________________.

8 Диаметр основания конуса равен 40, а длина образующей – 25. Найдите высоту конуса.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180226

9 Найдите $4\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}5$.

Ответ: ___________________________.

10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 494 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c\cdot\frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов, f – частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 18 м/с.

Ответ: ___________________________.

11 Первый сплав содержит 5% меди, второй – 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции
$y = x\sqrt{x} - 6x + 1$ на отрезке $[2; 25]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

15 Решите неравенство
$$\frac{10^x - 25\cdot 2^x - 2\cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geq 0.$$

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 30°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 4\sqrt{3}$.

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

19 Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N — натуральное число) больше правильного результата.

а) Могло ли N равняться 2?
б) Могло ли N равняться 10?
в) Каково наибольшее возможное значение N?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	140
2	31,1
3	6
4	0,5
5	-5
6	39
7	7
8	15
9	2
10	506
11	18
12	-31
13	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ n\in Z.$ б) $\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6};\frac{13\pi}{6}$
14	$5\sqrt{3}$
15	$[2;4)$
16	6
17	5
18	$(-\infty;-1)\cup(-1;0)$
19	а) да, б) нет, в) 9

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$\cos 2x+\sin^2 x=0{,}75.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right].$

Решение:

а)

Косинус двойного угла

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$1-2\sin^2 x+\sin^2 x=0{,}75$

$\sin^2 x=\frac{1}{4}$

$\sin x=\pm\frac{1}{2}$

$x_1=\frac{\pi}{6}+\pi n;\ n\in Z$

$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{19\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{17\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in Z$. б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

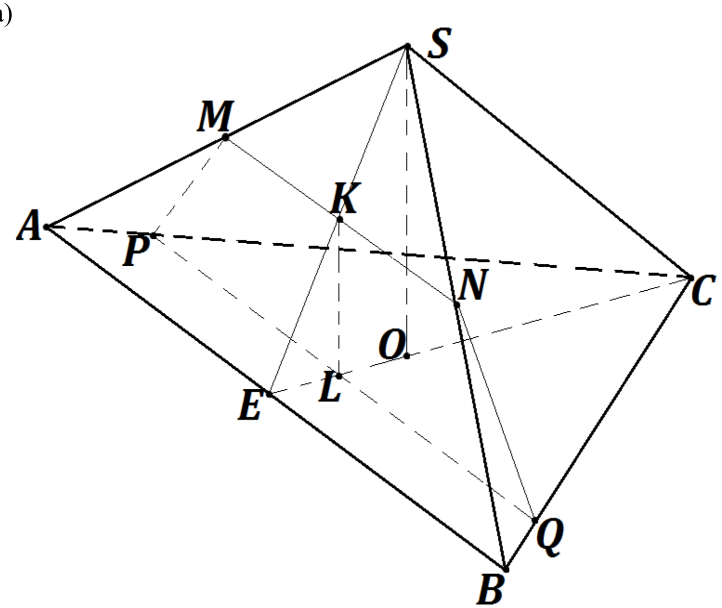
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

Решение:

а)



Пусть O — центр основания пирамиды

Рассмотрим $\triangle ABS$ — равнобедренный:

Проведём медиану SE, являющуюся ещё и биссектрисой и высотой

Пусть $(SEC) \cap MN = K$

Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$

Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$

Построим прямую NQ, т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости

Построим прямую PM, т.к. точки P и M лежат в одной плоскости

$MNQP$ — сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ — прямоугольный:

Т.к. K — середина SE и $KL \parallel SO$, то KL — средняя линия $\triangle SOE$

$\Rightarrow L$ — середина OE

Пусть $EL = OL = x$

Т.к. CE — медиана в $\triangle ABC$, то:

$\frac{OC}{OE} = 2:1$

$\Rightarrow OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$

$$=> \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$

■

б)

Расстояние от точки A до плоскости α равно расстоянию от точки E до плоскости α, потому что A и E лежат на одной прямой

Итак, EL — искомое расстояние

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60 = 30\sqrt{3}$$

$$EL = \frac{1}{6} \cdot CE = \frac{1}{6} \cdot 30\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: б) $5\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

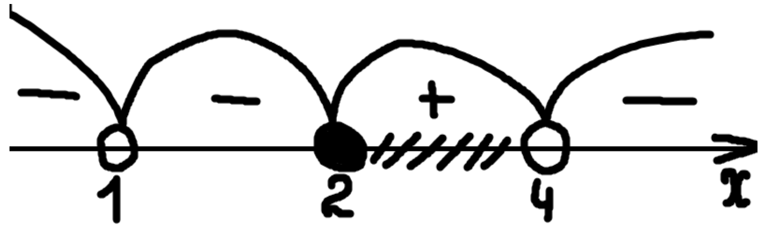
$$\frac{10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geq 0.$$

Решение:

$10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50 = 0$ $(10^x - 25 \cdot 2^x) + (-2 \cdot 5^x + 50) = 0$ $2^x \cdot (5^x - 25) - 2 \cdot (5^x - 25) = 0$ $(5^x - 25)(2^x - 2) = 0$	$5x - x^2 - 4 \neq 0$ $-x^2 + 5x - 4 \neq 0$ $D = 25 - 16 = 9$ $x_1 = \frac{-5+3}{-2} = 1$

$5^x - 25 = 0$ $5^x = 25$ $5^x = 5^2$ $x = 2$	$2^x - 2 = 0$ $2^x = 2$ $2^x = 2^1$ $x = 1$

$$x_2 = \frac{-5 - 3}{-2} = 4$$



Ответ: $[2; 4)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

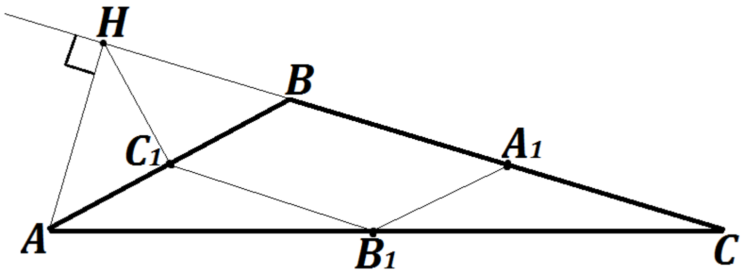
16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 30°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 4\sqrt{3}$.

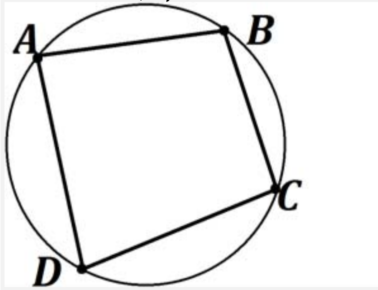
Решение:

а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1B_1C_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность

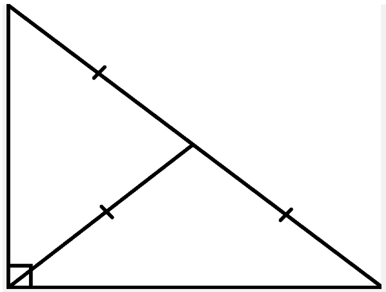


$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:
$\angle BCA = 45°$
$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 30 = 105°$
$\angle ABH = 180 - \angle ABC = 180 - 105 = 75°$
$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 75 = 15°$
$\angle CAH = \angle BAC + \angle BAH = 30 + 15 = 45°$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный
C_1H – медиана
=>
$C_1H = AC_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)
=>
$\triangle AC_1H$ – равнобедренный
=>
$\angle AHC_1 = \angle BAH = 15°$

Признаки параллелограмма

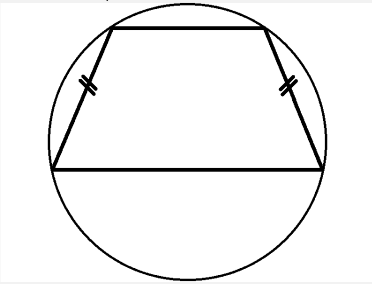
Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $A_1BC_1B_1$
$A_1B_1 \parallel BC_1$
$A_1B_1 = BC_1$ (т.к. A_1B_1 – средняя линия)
=>
$A_1BC_1B_1$ – параллелограмм
=>
$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 105°$
$\angle A_1HC_1 = \angle AHA_1 - \angle AHC_1 = 90 - 15 = 75°$

$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1HC_1 = 105 + 75 = 180°$
=>
Четырёхугольник $A_1B_1C_1H$ можно вписать в окружность
=>
Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности
■

б)

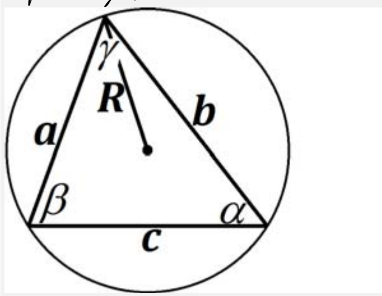
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1B_1C_1H$ — равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$
или
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

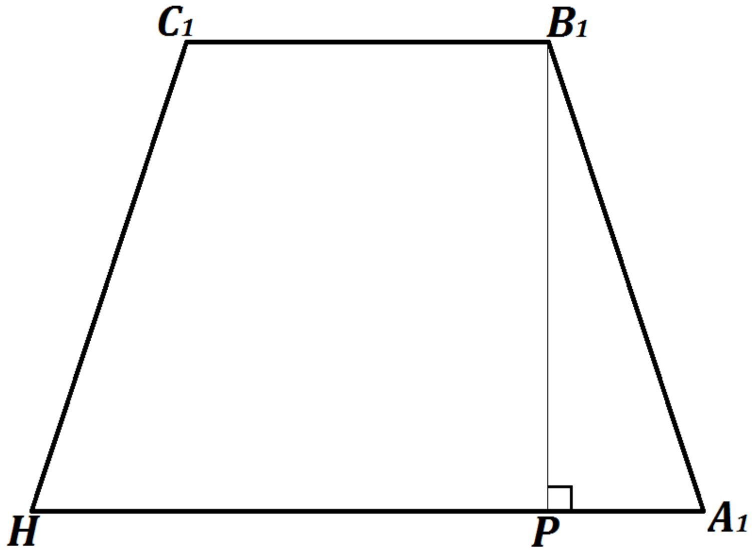
$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin 45°}$$

$$AB = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sin 45°}{\sin 30°} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{6}$$

=>

$$A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1B_1C_1H$:



Пусть
B_1P — высота трапеции

$\angle B_1A_1P = \angle BHC_1 = 75°$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$$\cos\angle B_1A_1P = \frac{A_1P}{A_1B_1}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\cos(45+30)^\circ = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ\sin 30^\circ = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}} \qquad \Big|\cdot 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{A_1P}{\sqrt{3}}$$

$$3\sqrt{2}-\sqrt{6} = \sqrt{2}\cdot A_1P$$

$$A_1P = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 3-\sqrt{3}$$

$$A_1H = 2\cdot A_1P + B_1C_1 = 2\cdot\left(3-\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{3} = 6$$

Ответ: б) 6

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Решение:

Переведём миллионы в тысячи:
1 млн это 1000 тыс.
1,2 млн это 1200 тыс.

Пусть клиент вносил платежи 7 числа каждого месяца

Кредит на 6 месяцев, поэтому будет 6 платежей:
x_1 – первый платёж
x_2 – второй платёж
…
x_6 – шестой платёж

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
15.01	1000
01.02	$1000 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) = 1000 + 10r$
07.02	$1000 + 10r - x_1$
15.02	900
01.03	$900 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) = 900 + 9r$
07.03	$900 + 9r - x_2$
15.03	800
01.04	$800 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) = 800 + 8r$
07.04	$800 + 8r - x_3$
15.04	700
01.05	$700 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) = 700 + 7r$
07.05	$700 + 7r - x_4$
15.05	600
01.06	$600 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) = 600 + 6r$
07.06	$600 + 6r - x_5$
15.06	500
01.07	$500 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) = 500 + 5r$
07.07	$500 + 5r - x_6$
15.07	0

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1000 + 10r - x_1 = 900 \\ 900 + 9r - x_2 = 800 \\ 800 + 8r - x_3 = 700 \\ 700 + 7r - x_4 = 600 \\ 600 + 6r - x_5 = 500 \\ 500 + 5r - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1000 + 10r - 900 = x_1 \\ 900 + 9r - 800 = x_2 \\ 800 + 8r - 700 = x_3 \\ 700 + 7r - 600 = x_4 \\ 600 + 6r - 500 = x_5 \\ 500 + 5r = x_6 \end{cases}$$

Сложим левые и правые участи уравнений:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000 + 45r$

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн рублей (по условию)
=>
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1200$ тыс.

$1000 + 45r > 1200$
$45r > 200$
$r > \frac{200}{45}$
$r > \frac{40}{9}$
$r > 4\frac{4}{9}$

Требуется найти наименьшее подходящее целое r
=>
$r = 5$

Ответ: 5

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$
имеет ровно три различных корня.

Решение:
Правая часть уравнения равна корню
=>
Правая часть уравнения неотрицательна

Получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 + x - a \geq 0 \\ \sqrt{x^4 - x^2 + a^2}^2 = (x^2 + x - a)^2 \end{cases}$$

Решим уравнение:
$x^4 - x^2 + a^2 = \left(x^2 + (x - a)\right)^2$

$x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2x^2(x - a) + (x - a)^2$

$x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2x^3 - 2ax^2 + x^2 - 2ax + a^2$

$-x^2 = 2x^3 - 2ax^2 + x^2 - 2ax$

$2x^3 + 2x^2 - 2ax^2 - 2ax = 0$

$2x^2(x + 1) - 2ax(x + 1) = 0$

$x^2(x + 1) - ax(x + 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 - ax) = 0$
$x(x + 1)(x - a) = 0$

Это уравнение умеет 3 решения
$x_1 = 0$
$x_2 = -1$
$x_3 = a$

Мы ищем все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных корня
=>
$a \neq 0$
$a \neq -1$

При этом каждый их трёх «иксов» должен удовлетворять неравенству $x^2 + x - a \geq 0$ из системы:

Если $x_1 = 0$, то
$0^2 + 0 - a \geq 0$
$a \leq 0$

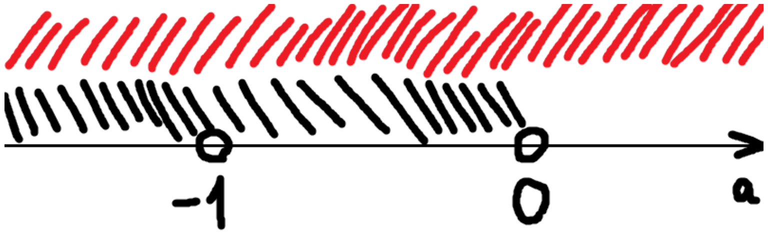
Если $x_2 = -1$, то
$(-1)^2 - 1 - a \geq 0$

$a \le 0$

Если $x_3 = a$, то
$a^2 + a - a \ge 0$
$a^2 \ge 0$
=>
$a -$ любое

Запишем систему всех условий для a:

$$\begin{cases} a \ne 0 \\ a \ne -1 \\ a \le 0 \\ a - \text{любое} \end{cases}$$



Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз ($N -$ натуральное число) больше правильного результата.

а) Могло ли N равняться 2?
б) Могло ли N равняться 10?
в) Каково наибольшее возможное значение N?

Решение:
Пусть
$x -$ двузначное число
$y -$ трёхзначное число
Тогда
$1000x + y -$ число, полученное после приписывания трёхзначного справа к двузначному

(Пример: 12 и 345, получится 12345, т.е. 12 стало количеством тысяч)

$$\frac{1000x + y}{xy} = N$$

а)
$$\frac{1000x + y}{xy} = 2$$

$1000x + y = 2xy$
Попробуем решить в целых числах

Заметим, что $y -$ чётное число, т.к. правая часть уравнения чётная, значит и оба слагаемых левой части уравнения – чётные

$1000x - 2xy = -y$
$2x(500 - y) = -y$

$$x = \frac{y}{2(y - 500)}$$

Заметим, что $(y - 500) -$ чётное число, т.к. если из чётного y вычесть чётные 500, то получится чётный результат

=>

y делится как минимум на 4

Возьмём y большее 500, и которое при этом делится на 4

$y = 504$ – самое первое такое число
Получаем
$$x = \frac{504}{2(504-500)} = 63$$

Проверяем:
$$\frac{63504}{63 \cdot 504} = 2$$
=>
Могло

б)
$$\frac{1000x + y}{xy} = 10$$

$1000x + y = 10xy$
$1000x = 10xy - y$
$1000x = y(10x - 1)$
$$x = \frac{y(10x-1)}{1000}$$

Числа 1000 и $(10x - 1)$ не имеют общих делителей, т.к.
$1000 = 2^3 \cdot 5^3$

$(10x - 1)$ состоит из двух слагаемых
$10x$ делится на 2 и 5
-1 не делится на 2 и 5
=>
$(10x - 1)$ не делится на 2 и 5

=>
y обязан делиться на 1000 без остатка, но y – трёхзначное число
=>
y не может делиться на 1000 без остатка
=>
Не могло

в)

$$\frac{1000x + y}{xy} = N$$

$$N = \frac{1000x}{xy} + \frac{y}{xy}$$

$$N = \frac{1000}{y} + \frac{1}{x}$$

N будет максимальным, если x и y будут как можно меньшими

Минимально возможный y – это 100
Минимально возможный x – это 10

=>
N не может быть больше, чем
$$\frac{1000}{100} + \frac{1}{10} = 10{,}1$$

$N \le 10{,}1$

$N = 10$ не подходит (доказано в пункте б)
=>
$N \le 9$

Проверим могло ли N равняться 9?
$$\frac{1000x + y}{xy} = 9$$

$1000x + y = 9xy$
$1000x - 9xy = -y$
$x(1000 - 9y) = -y$
$$x = \frac{y}{9y - 1000}$$

Чтобы x и y получились положительными знаменатель дроби должен быть положительным
$9y - 1000 > 0$
$9y > 1000$
$$y > 111\frac{1}{9}$$

=>
$y \geq 112$

Если $y = 112$, то
$$x = \frac{112}{9 \cdot 112 - 1000} = \frac{112}{8} = 14$$

Проверяем:
$$\frac{14112}{14 \cdot 112} = 9$$
=>
$N = 9$ подходит

Ответ: а) да, б) нет, в) 9

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180226